Pontificia Universidad Javeriana
Algebra Lineal
Juan Camilo Olaya F.

Segundo Parcial Algebra Lineal Abril 21 de 2007

Ejercicio 1. Dado el conjunto $W = \{(a,b,c)\varepsilon R^3 : 2a+b-c=0\}$

a) Demuestre que W es un subespacio vectorial de R^3.

b) Encuentre una base para W y la dimensión de W.

Solución:

- Que me dan:
  - $\rightarrow$ $W = \{(a,b,c)\varepsilon R^3 : 2a+b-c=0\}$
- Que me piden:
  - $\rightarrow$ Demuestrar que W es un subespacio vectorial de R^3.
  - $\rightarrow$ Una base para W y la dimensión de W.

Demostración:

a)

i. $W \neq \varnothing$ porque: El vector $\vec{u} = (1,0,2)\varepsilon R^3$ y se cumple que $2(1)+0-2=0$ por lo tanto podemos afirmar que el conjunto W es no vacio, ya que se verifica que existe al menos un vector de este conjunto.

ii. W es subconjunto de R^3: Todos los elementos de W tienen tres componentes reales y por lo tanto todo elemento del conjunto W es un elemento de R^3.

iii. Es cerrado bajo la suma, es decir, $(u+v)\ \varepsilon\ W$:

$u\ \varepsilon\ W \qquad u=(a_1,b_1,c_1) \qquad \Rightarrow 2a_1+b_1-c_1=0$
$v\ \varepsilon\ W \qquad v=(a_2,b_2,c_2) \qquad \Rightarrow 2a_2+b_2-c_2=0$

$\rightarrow$ $(u+v)\ \varepsilon\ W$

u+v= $(a_1+a_2,\ b_1+b_2, c_1+c_2)$
u+v= $2(a_1+a_2)+b_1+b_2-c_1+c_2$
u+v= $2a_1+b_1-c_1+\ 2a_2+b_2-c_2$
u+v= 0 + 0
u+ v= 0

Por lo tanto $(u+v)\ \varepsilon\ W$.

iv. Es cerrado bajo el producto, es decir, $(\alpha u)\varepsilon\, W$.

$(\alpha u) = \alpha(a_1,b_1,c_1)$
$(\alpha u) = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1)$
$(\alpha u) = 2(\alpha a_1)+\alpha b_1 - \alpha c_1)$
$(\alpha u) = \alpha(2a_1+b_1-c_1)$
$(\alpha u) = \alpha(0)$
$(\alpha u) = 0$

Por lo tanto $(\alpha u)\varepsilon\, W$.

Conclusión: W es un subespacio vectorial de R^3, ya que cumple con todas las propiedades.

b)

$$2a + b - c = 0$$
$$2a = -b + c$$
$$x = -\frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$
$$x = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow$ La base para W es β y la dimensión es 2 ya que la dimensión es el número de elementos que tiene la base.